



Forma Canônica de Jordan

Questão 1
Um operador linear $T: V \rightarrow V$ é nilpotente se $T^k = 0$, para algum k . O menor inteiro m tal que $T^m = 0$, é dito o índice de T .

Teorema Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear tal que $Tu \neq 0$ e $T^k = 0$, para algum k . Então o conjunto $\{u, Tu, \dots, T^{k-1}u\}$ é linearmente independente.

Demonstração. Seja

$$\alpha_1 u + \alpha_2 Tu + \dots + \alpha_{k-1} T^{k-1}u = 0.$$

~~Multiplicando~~ aplicando T^{k-1} a ambos lado, temos

$$\alpha_1 T^{k-1}u = 0. \text{ Como } Tu \neq 0 \text{ então}$$

$$\alpha_1 = 0 \text{ e assim obtemos}$$



$\alpha_2 T v + \dots + \alpha_n T v^{n-1} = 0$. Aplicando T^{n-2} a ambos lados desta última igualdade, obtemos $\alpha_2 T v^{n-1} = 0$, e assim $\alpha_2 = 0$. Seguindo desta forma, obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Corolário Num espaço de dimensão n , o índice de um operador nilpotente é menor ou igual a n .

Corolário Seja $T: V \rightarrow V$ um operador num espaço V de dimensão n . Então T é nilpotente de índice n se, e somente, existe uma base β de V tal que a matriz $[T]_\beta$ associada a T é da forma



$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Teorema Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice n num espaço V de dimensão n . Então existem inteiros $k_1 = k \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$ tal que $V = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, sendo E_i subespaços cíclicos de dimensão k_i .

Corolário Nas condições do teorema anterior, temos que $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Se escolhemos $\beta_i = \{v_i, T v_i, \dots, T^{k_i-1} v_i\}$ uma base de E_i , então $\beta = \bigcup_i \beta_i$ é uma base



de V na qual a matriz $[T]_{\beta}$ ~~te~~ é formado por blocos da forma $(*)$.

O resultado anterior é a forma canônica de Jordan para operadores nilpotentes.

Forma de Jordan

A forma de Jordan garante que um operador $T: V \rightarrow V$ é similar a uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1, n_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, n_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r, n_r) \end{bmatrix}$$



sendo $J(\lambda_i, n_i)$ um bloco de Jordan, que é uma matriz triangular inferior ~~diagonal~~ com o autovalor λ_i na diagonal, que se repitem de acordo a sua multiplicidade algébrica n_i , ~~e os elementos abaixo da sua diagonal são zeros ou um, isto é~~

~~$J(\lambda)$~~

Teorema Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores diferentes do operador $T: V \rightarrow V$, e seja n_i a multiplicidade algébrica de λ_i , para $i=1, \dots, r$. Então o operador $E_i = N[(T - \lambda_i I)^{n_i}]$ é nilpotente de índice n_i e sua dimensão $\dim(E_i) = n_i$, além disso



$$V = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$$

Teorema (Forma Canônica de Jordan)

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Então existe uma base β de V tal que a matriz $[T]_\beta$ de T é formada por blocos de Jordan na diagonal.

Questão 3

Já que $\det(tI - B) = (t - 1)^n$ e B é real $n \times n$, então B tem um único autovalor $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica igual a n . Então B é similar à matriz identidade, e assim B' é também similar à matriz identidade.



Teorema Central do limite

Questão 1.

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, com média

$E[X_i] = \mu$, para todo $i=1, \dots, n$, e variância $V(X_i) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, para todo $i=1, \dots, n$. Seja

$S_n = X_1 + \dots + X_n$. Então a

sequência de variáveis aleatórias

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \quad \text{converge}$$

para uma variável aleatória de distribuição normal de média zero e variância 1



Questão 2

Pela lei dos Grandes números,
Sabemos que

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = 0\right] = 1.$$

Então, $\frac{S_n}{n}$ é "aproximadamente"
 μ , para n suficientemente gran-
de, mas não é exatamente igual
a μ . Então podemos escrever

$$\frac{S_n}{n} = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Y_n, \text{ uma variável}$$

aleatória com $E[Y_n] = 0$, e
Variancia $V(Y_n) = 1$.



Teorema de Stokes

Questão 1

O teorema de Stokes estabelece uma relação entre uma integral de linha e uma integral de superfície, ~~sobre~~ sobre campos vetoriais. Primeiramente vamos lembrar de algumas definições.

Definição 1 Um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ é uma função $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Para o caso particular de $\mathbb{R}^2$, denotase o campo vetorial

$$F(x, y) = F_x(x, y)\mathbf{i} + F_y(x, y)\mathbf{j}, \text{ sendo}$$

$$\mathbf{i} = (1, 0) \text{ e } \mathbf{j} = (0, 1) \text{ e para o}$$

caso particular de um campo



vetorial em $\mathbb{R}^3$, denota-se

$$F(x, y, z) = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k},$$

sendo, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Definição 2 Seja $F(x, y)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e seja

a curva $C: r(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ para $u \in [a, b]$. Define-se a integral de linha de F em C , denotado por $\int_C F dr$, como

$$\int_C F dr = \int_a^b F(r(u)) r'(u) du.$$



Definição 3

Seja $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injectiva de classe C^1 , tal que $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$

existem e são linearmente independentes. Então $K = f(S)$ é chamada de superfície e f de parametrização de K .

Definição 4 (Integral de superfície)

Seja $F(x, y, z)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e seja K uma superfície parametrizada por f . Define-se a integral de superfície de F em K , denotado por $\iint_{K_f} F dA$, como

$$\iint_{K_f} F dA = \iint_S F(f(u, v)) \left(\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right) du dv$$



Teorema de Stokes

Seja $F(x, y, z)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, seja K uma superfície simples com orientação positiva, parametrizada por f , com fronteira $\partial K^+ = \partial f(S)^+$. Então

$$\int_{\partial K^+} F \, dA = \iint_K \text{rot}(F) \, dA,$$

sendo

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$